Magie der Mathematik
Von der Verblüffung zum Verstehen

René Schelldorfer, Pädagogische Hochschule Zürich

Magie der Mathematik:
Eine Darbietung in fünf Nummern

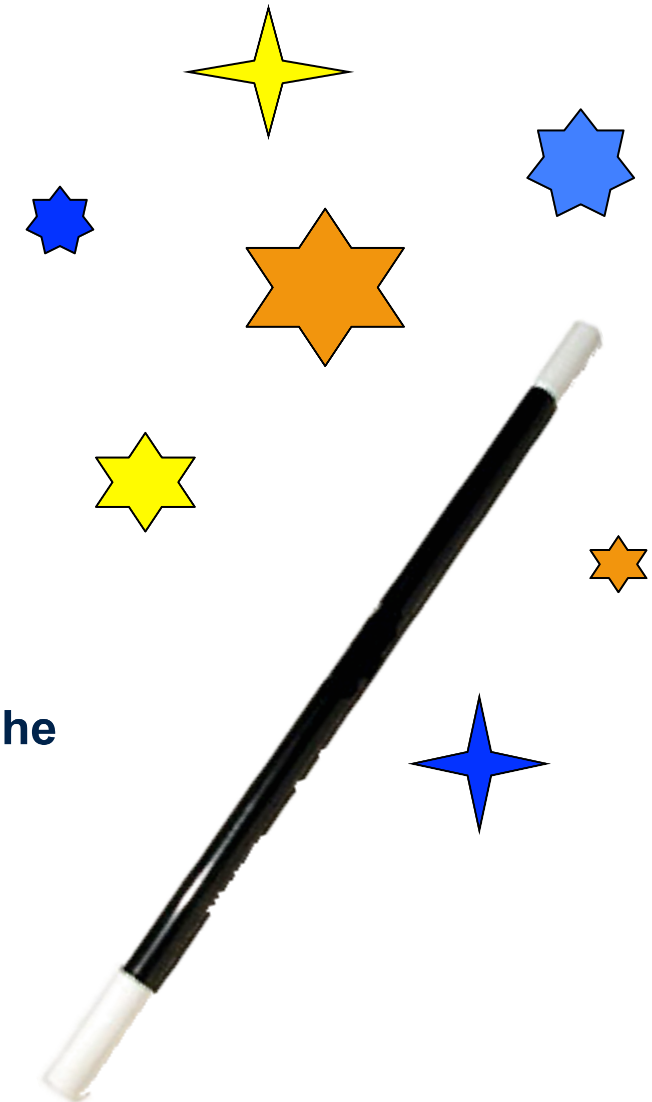
① Die Nummer mit den Zahlenkarten

② Die Nummer mit den störrischen Pferden

③ Die Nummer mit der fallenden Leiter

④ Die Nummer mit der verschwindenden Fläche

⑤ Die Nummer mit dem Seil



① Die Nummer mit den Zahlenkarten *oder* Mathematische Zaubertricks sind beliebt.

Die Nummer mit den Zahlenkarten – Erstbegegnung im Jahr 1976 auf dem Pausenplatz...

Die Nummer mit den Zahlenkarten

64 65 66 67 68
69 70 71 72 73
74 75 76 77 78
79 80 81 82 83
84 85 86 87 88 89
90 91 92 93 94 95
96 97 98 99 100

Denke dir eine Zahl von 1 bis 100.

Ist die Zahl auf der Zahlenkarte?
Ja / Nein.

Die Nummer mit den Zahlenkarten – Die Erklärung

64	65	66	67	68	
69	70	71	72	73	
74	75	76	77	78	
79	80	81	82	83	
84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	

Feststellung:

Jede Karte beginnt mit der tiefsten Zahl.

Diese **Basiszahlen**

sind 1, 2, 4, 8, 16, 32 und 64 (sogenannte **Zweierpotenzen**).

Der Zauberer zählt die Basiszahlen der Karten mit «Ja» zusammen und erhält die gedachte Zahl.

Die Nummer mit den Zahlenkarten – Die Erklärung

Jede Zahl von 1 bis 100 kann als **Summe aus den Basiszahlen** 1, 2, 4, 8, 16, 32 und 64 dargestellt werden.

1 = 1 → auf Zahlenkarte ①

2 = 2 → auf Zahlenkarte ②

3 = 1 + 2 → auf Zahlenkarten ①, ②

4 = 4 → auf Zahlenkarte ④

5 = 1 + 4 → auf Zahlenkarten ①, ④

...

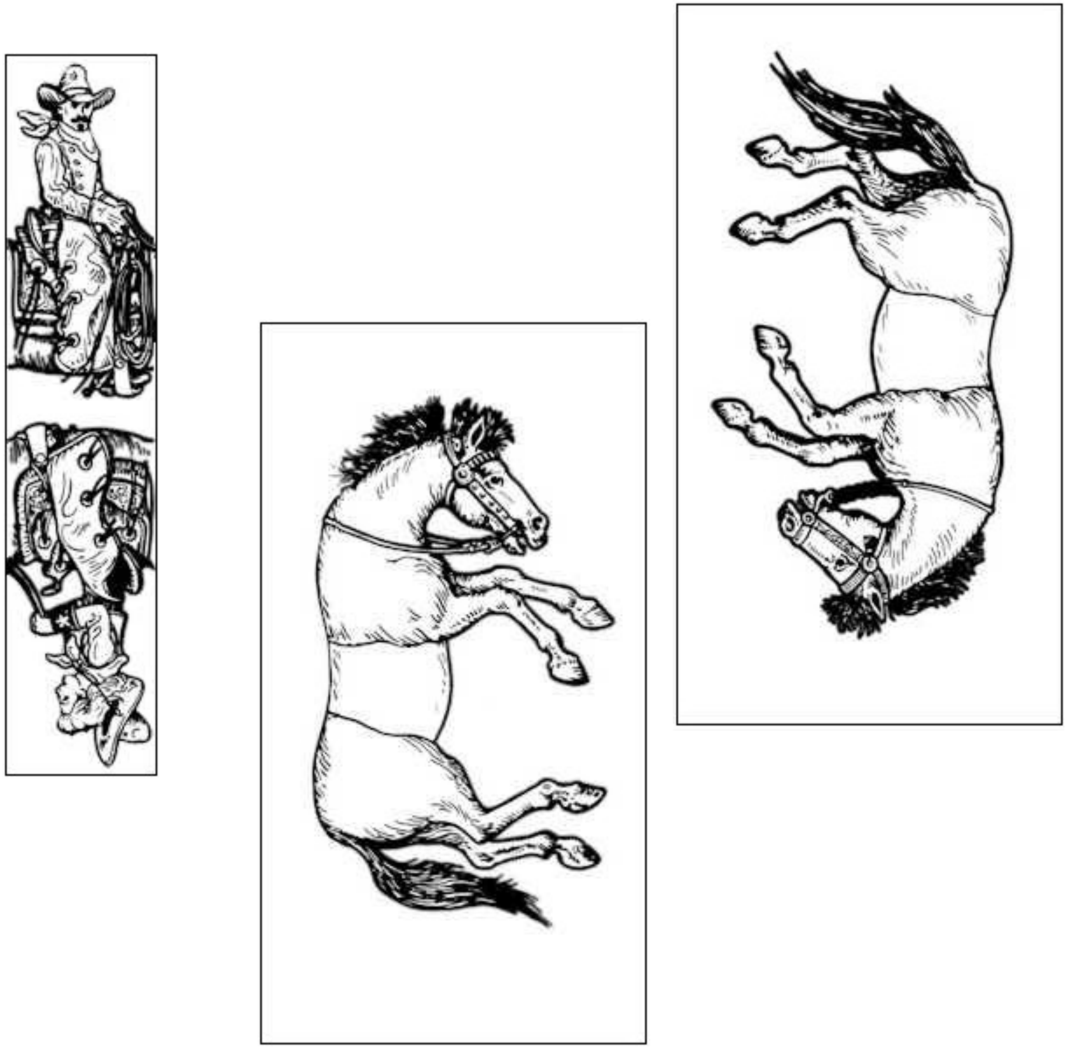
15 = 1 + 2 + 4 + 8 → auf Zahlenkarten ①, ②, ④, ⑧

...

54 = 2 + 4 + 16 + 32 → auf Zahlenkarten ②, ④, ⑯, ㉜

② Die Nummer mit den störrischen Pferden:
Knobeln mit Material gefällt.

Die Nummer mit den störrischen Pferden



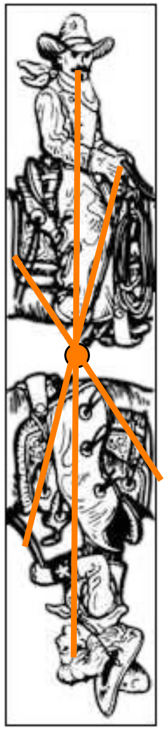
Aufgabe

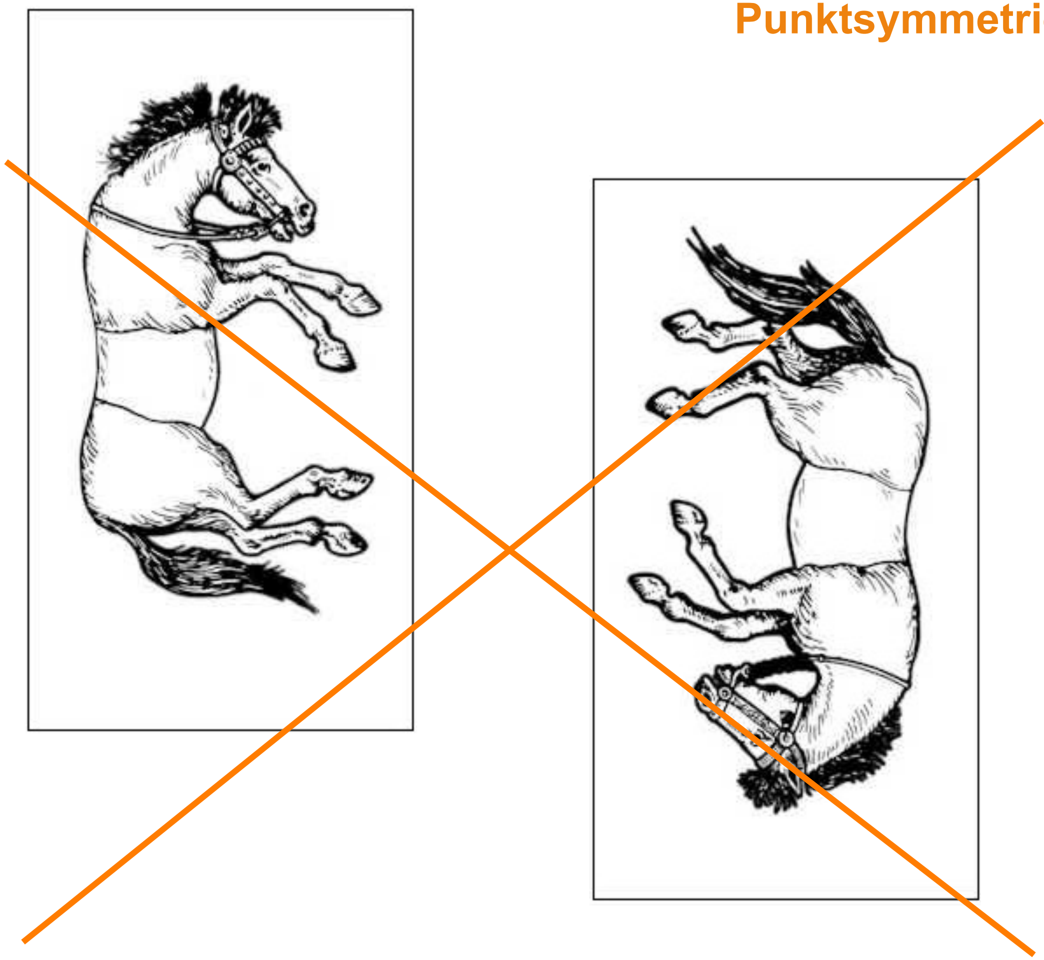
Ordne die Karten so an, dass jeder Reiter in korrekter Sitzposition auf einem Pferd sitzt.

Quelle:

Sam Loyd,
"Trick Mules Puzzle“,1872

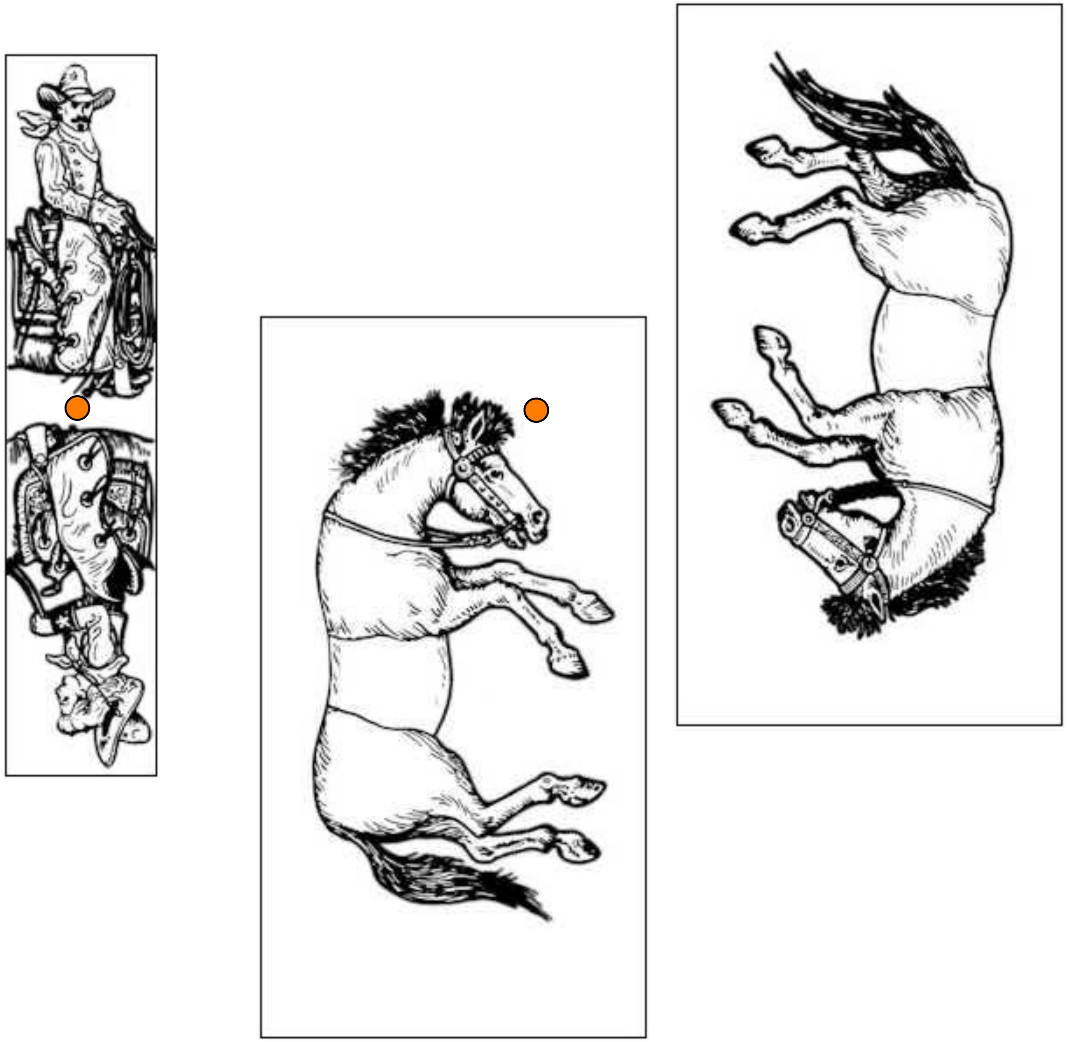
Die Nummer mit den störrischen Pferden





Mathematische Idee:
Punktsymmetrie

Die Nummer mit den störrischen Pferden – Die Lösung



Aufgabe

Ordne die Karten so an, dass jeder Reiter in korrekter Sitzposition auf einem Pferd sitzt.

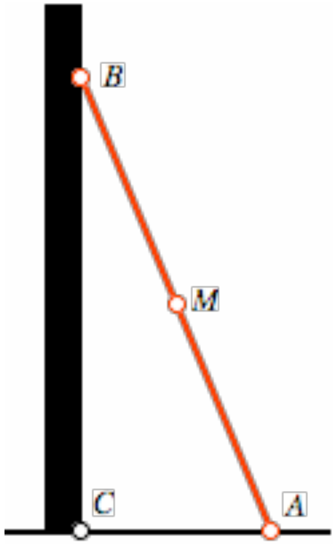
③ Die Nummer mit der fallenden Leiter *oder* Manchmal täuscht die Intuition.

Die Nummer mit der Leiter

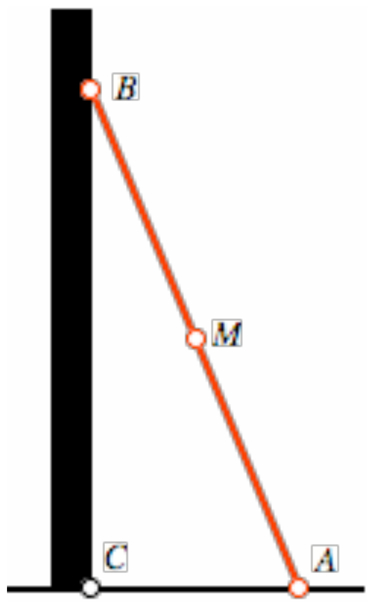
Bewegung des Leitermittelpunktes M, wenn

– Leiterende A immer am Boden,

– Leiterspitze B immer an der Wand?



Die Nummer mit der Leiter



Bewegung des Leitermittelpunktes M, wenn

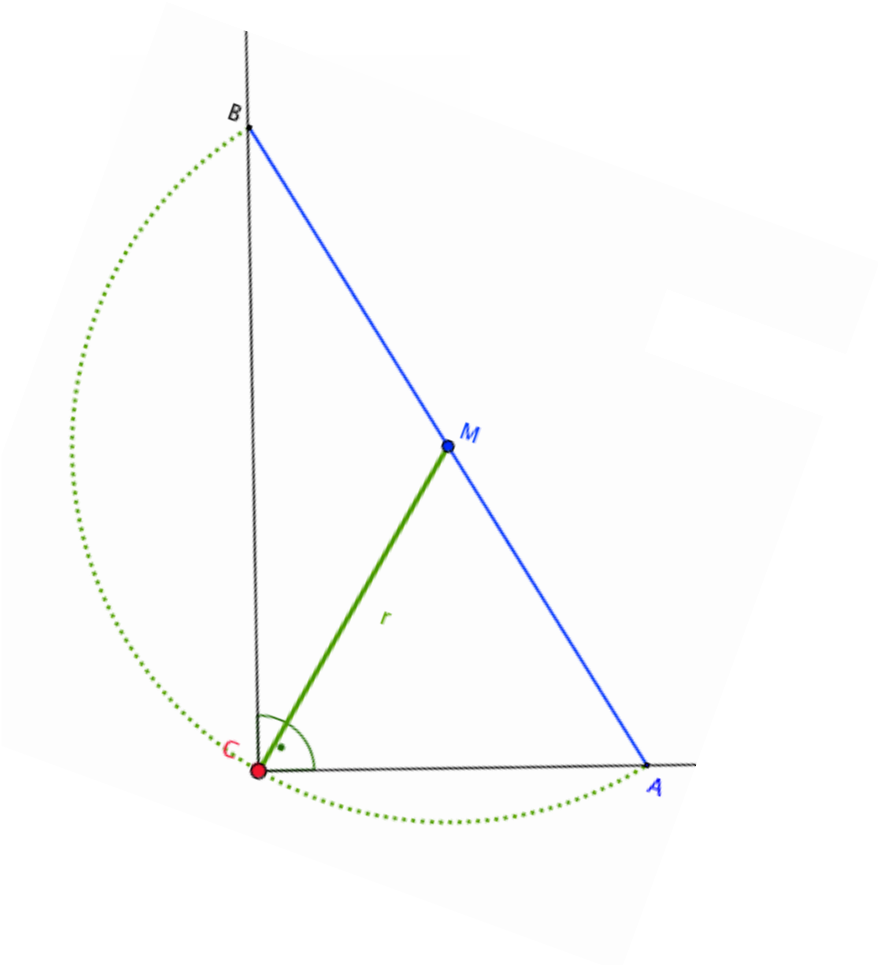
– Leiterende A immer am Boden,

– Leiterspitze B immer an der Wand?

Die Lösung: **Ein Viertelkreis!**

Die Lösung sehen ist das eine,
kann man sie aber auch verstehen?

Die Nummer mit der Leiter – Die Lösung



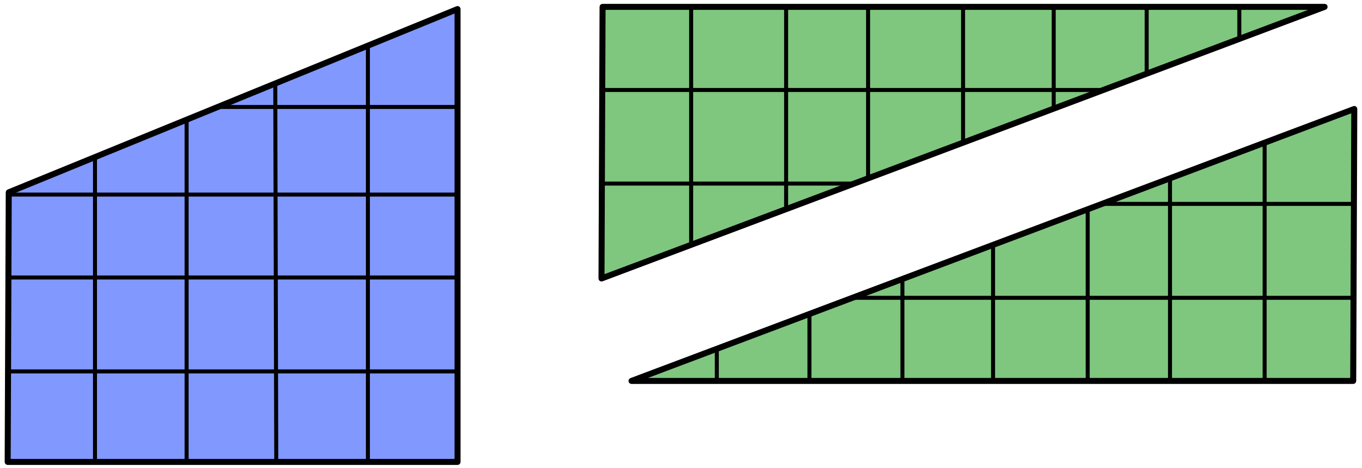
Geozentrisches Weltbild:
Boden und Wand bleiben fest,
die Leiter bewegt sich.

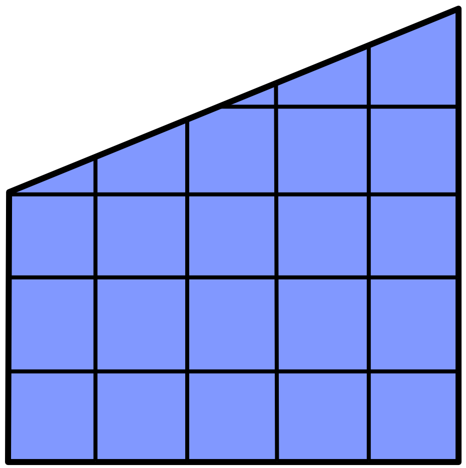
Leiterzentrisches Weltbild:
Die Leiter bleibt fest,
Boden und Wand bewegen sich.

Begründung:
① Punkt C auf Thales(halb-)kreis über AB
② CM Radius des Kreises,
also immer gleich lang
③ Geozentrisch:
C fix, also M auf Viertelkreis

④ Die Nummer mit der verschwindenden Fläche *oder* Vermeintlich Unmögliches fordert heraus.

Die Nummer mit der verschwindenden Fläche



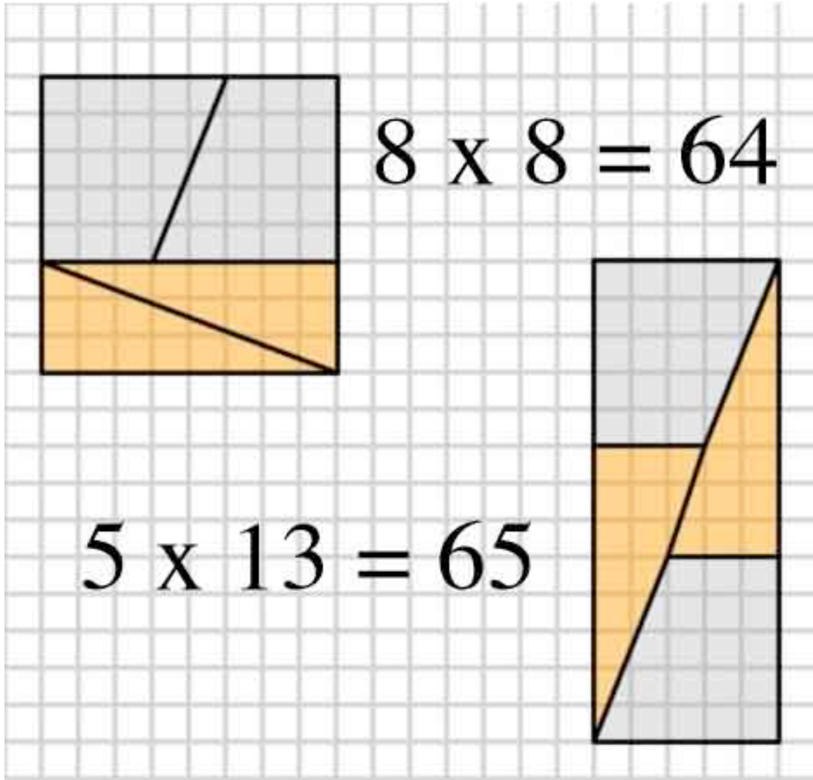


Bilde aus den vier Teilen **ein Quadrat.**
Welchen **Flächeninhalt** hat es?

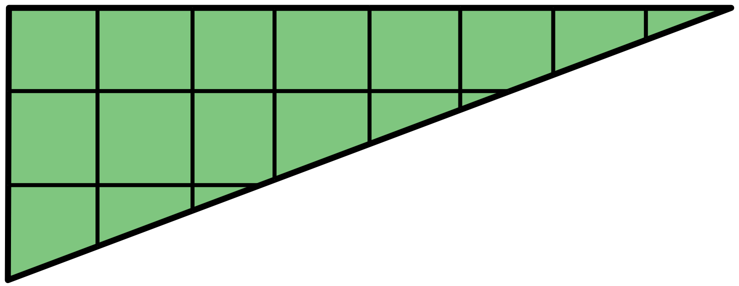
Bilde dann aus den vier Teilen **ein Rechteck**.
Welchen **Flächeninhalt** hat es?

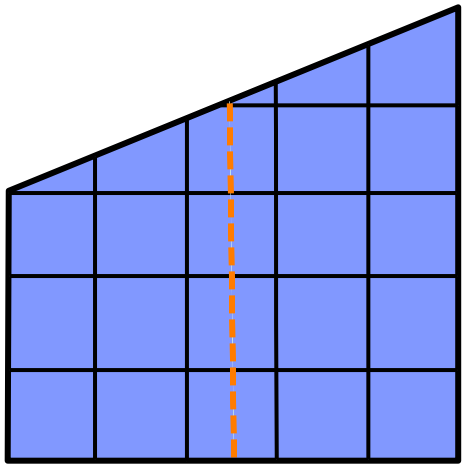
Vergleiche die Flächeninhalte!

Die Nummer mit der verschwindenden Fläche



Die Nummer mit der verschwindenden Fläche - Erklärung





Flächeninhalt Dreieck:

$A = (3 \cdot 8) : 2 = 12$

Flächeninhalt Trapez:

Mittellinie $m = (3 + 5) : 2 = 4$

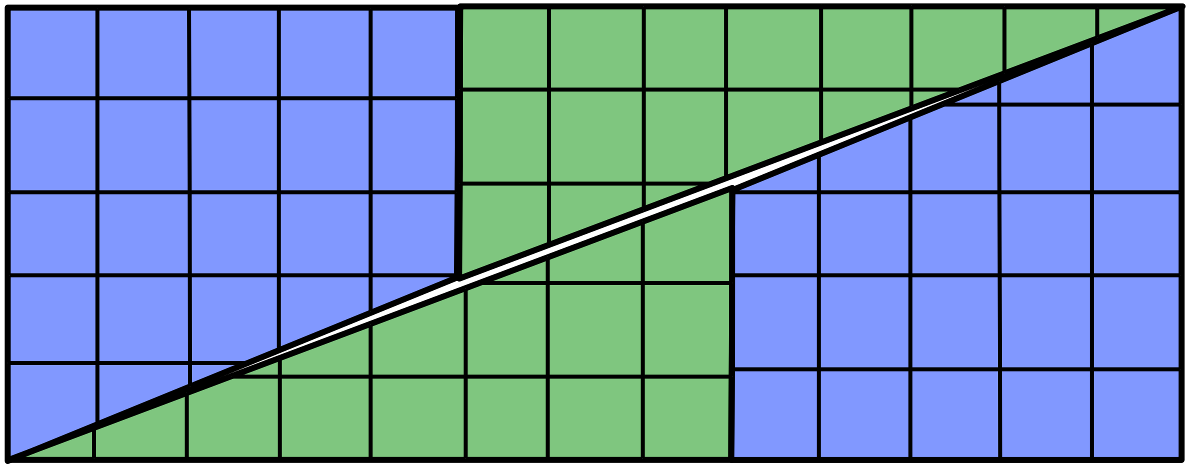
Flächeninhalt $A = 4 \cdot 5 = 20$

Flächeninhalt aller vier Teile:

$A = 12 + 12 + 20 + 20 = 64$

Beim Rechteck ist das Problem!

Die Nummer mit der verschwindenden Fläche



Entlang der Diagonalen des Rechtecks entsteht ein Loch in der Form eines Parallelogramms!

Dieses Loch ergibt die zusätzliche Flächeneinheit.

⑤ Die Nummer mit dem Seil *oder*
Verstehen kostet manchmal ganz schön Einsatz.

Die Nummer mit dem Seil

Seil 1 m länger als der Umfang des Fussballs respektive der Erdkugel

Schätze den Abstand des Seils

– zum Fussball

– zur Erdkugel.

Die Nummer mit dem Seil – Die Lösung

Die Lösung: Δd **= 16 cm**

Für den Fussball oder die Erdkugel?

Für beide!!

Die Nummer mit dem Seil – Verstehen Teil 1

Formel (mit π = 3.14...):
Umfang = Durchmesser · π, *also*
Durchmesser = Umfang : π

Fussball:
Durchmesser d = 70 cm : π ≈ *22.4 cm*

Seil:
Durchmesser d = 170 cm : π ≈ *54.1 cm*

Abstand:
Δd = (54.1 cm – 22.4 cm) : 2 ≈ **16 cm**

Die Nummer mit dem Seil – Verstehen Teil 1

Formel (mit π = 3.14...):
Umfang = Durchmesser · π, *also*
Durchmesser = Umfang : π

Erdkugel:
d ≈ 40‘000 km : π
≈ 12‘732.3954474 km

Seil:
d ≈ 40‘000.001 km : π
≈ 12‘732.3957657 km

Abstand:
Δd = (12‘732.3957657 km
– 12‘732.3954474) : 2 ≈ **16 cm**

Die Nummer mit dem Seil – Verstehen Teil 1

Formel (mit π = 3.14...):
Durchmesser = Umfang : π
kurz: $d = U : \pi$

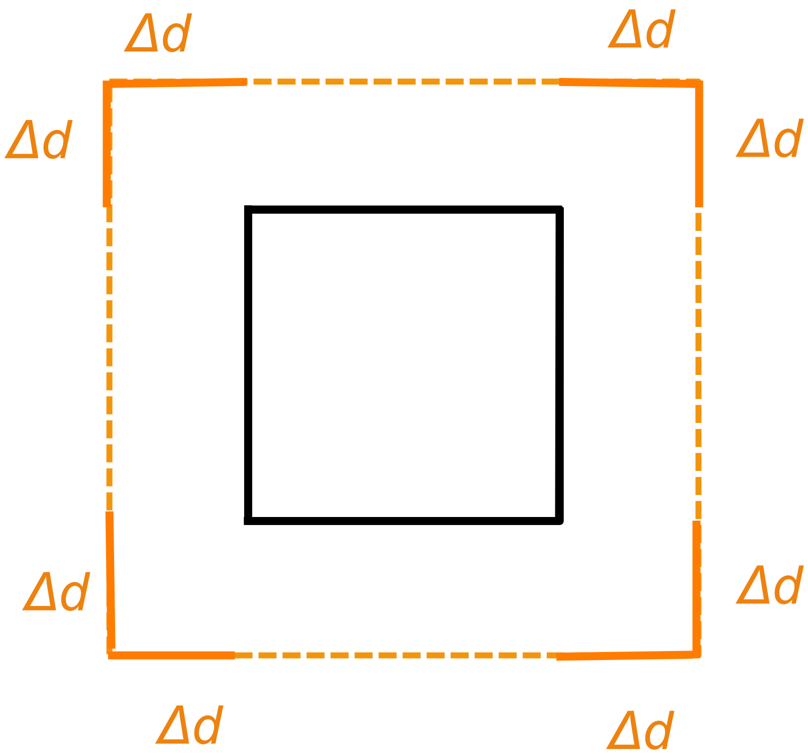
Beliebige Kugel:
$d = U : \pi$ (Umfang in Metern)

Seil:
$d = (U + 1) : \pi$ (Umfang in Metern)

Abstand:
$\Delta d = [(U + 1) : \pi - U : \pi] : 2$
$= [U{:}\pi + 1{:}\pi - U{:}\pi] : 2$
$= 1 : 2\pi \approx$ **16 cm**

Aber nun einmal ehrlich ... Trotzdem fällt es schwer, dies zu akzeptieren, oder?

Die Nummer mit dem Seil – Verstehen Teil 2

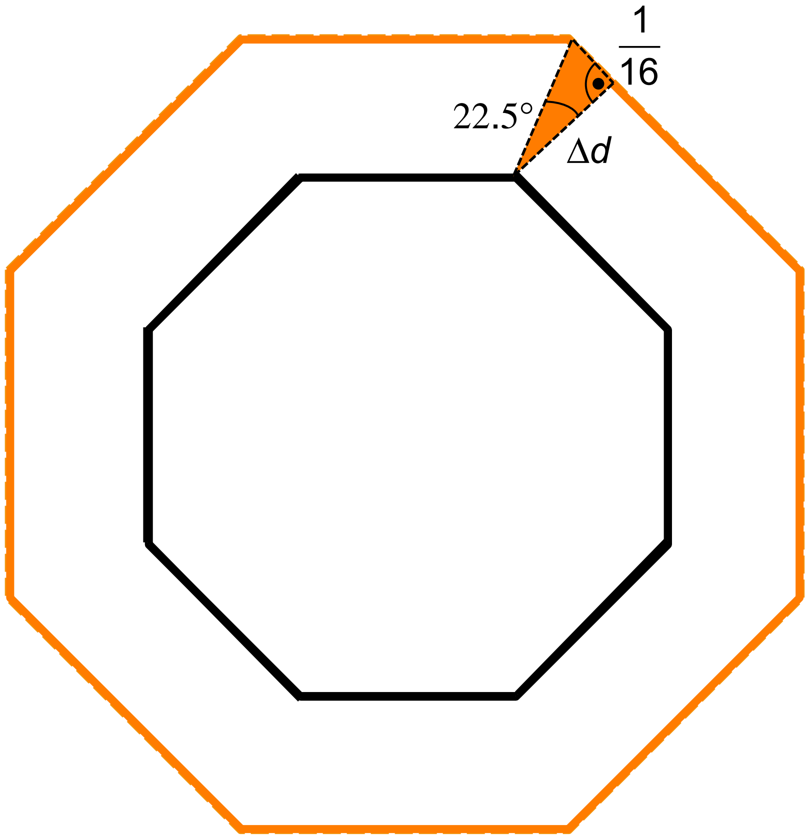


Um ein **Quadrat** wird eine Schnur gelegt, deren Umfang 1 m länger ist...

$8 \cdot \Delta d$ = 1 m, also
Δd = **12.5 cm,**

unabhängig von der Grösse des Quadrates!

Die Nummer mit dem Seil – Verstehen Teil 2

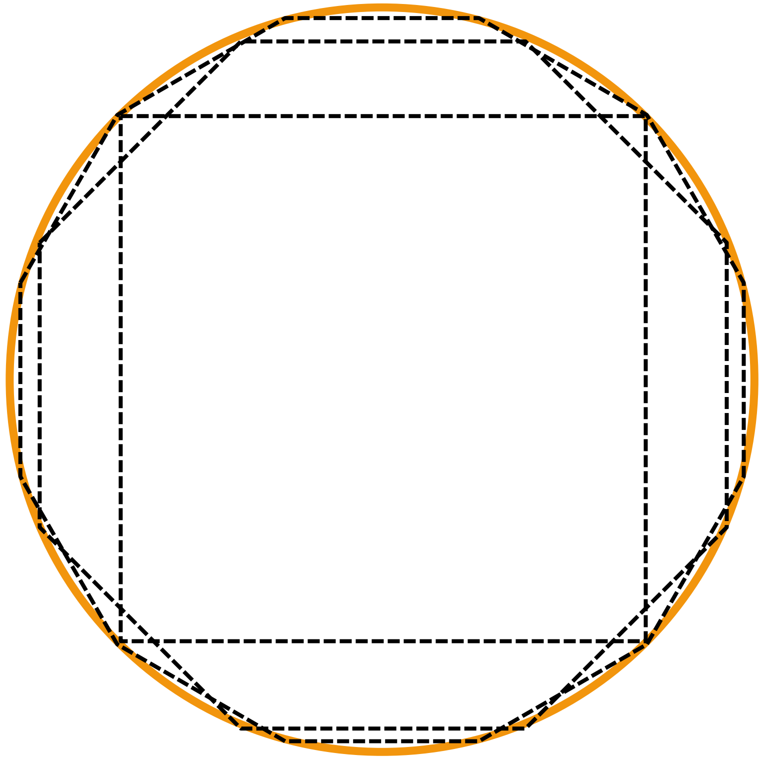


Um ein **Achteck** wird eine Schnur gelegt, deren Umfang 1 m länger ist...

Δd = 1 : (16 · tan(22.5°))
≈ 15 cm,

unabhängig von der Grösse des Achtecks!

Die Nummer mit dem Seil – Verstehen Teil 2



Je mehr Ecken, desto besser nähert das Vieleck den Kreis an.

Bei jedem Vieleck ist derselbe Vorgang durchführbar, die Grösse des Vielecks spielt keine Rolle: Die Zwischenstücke machen den Abstand aus.

Dies gilt also auch beim Kreis.

Magie der Mathematik – Von der Verblüffung zum Verstehen

Denkanstösse für den Mathematikunterricht:

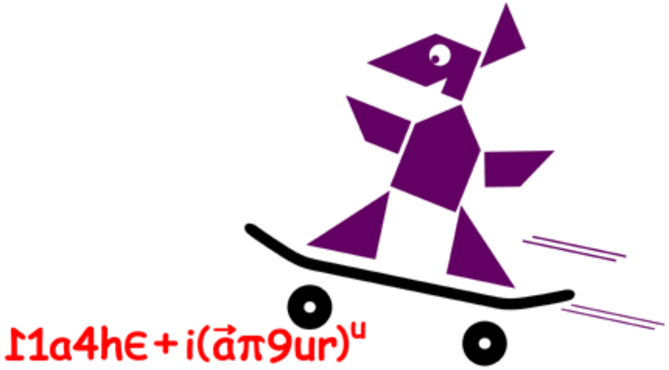
- ① Zahlenkarten → Mathematische Zaubertricks sind beliebt.
- ② Störrische Pferde → Knobeln mit Material gefällt.
- ③ Fallende Leiter → Manchmal täuscht die Intuition.
- ④ Verschwindende Fläche → Vermeintlich Unmögliches fordert heraus.
- ⑤ Seil → Verstehen kostet manchmal ganz schön Einsatz.

Magie der Mathematik – Von der Verblüffung zum Verstehen

Fundgruben für Ideen:

Bücher mit mathematischen Knobelaufgaben,
zu erkennen an Titeln wie
«Spiele mit Zahlen», «Spass mit Mathematik», «Kabarett der Mathematik» ...

Internationaler Wettbewerb **«Känguru der Mathematik»** für 3. – 12. Klasse
(2012: fast 20‘000 CH-Teilnehmende),
via http://www.mathe-kaenguru.ch
alte Aufgabenserien downloaden



Besten Dank für die Aufmerksamkeit!